HWV Zürich – Finance
Grundlagen Fixed Income

Benno Weber (benno@benno.ch)

30. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Vergleich zu Aktien, Hedge Funds, Derivaten und Rohstoffen gelten Obligationen als langweilige Investitionen. Das widerspiegelt sich auch in ihrem Namen: in Deutschland heissen diese Instrumente *Renten* – und Obligationen-Spezialisten gelten entsprechend als *Rentner*. Dabei ist die Idee der Rente sehr nahe bei der Realität. Wie die AHV zahlt eine Obligation dem Anleger in regelmässigen Abständen einen bestimmten Betrag. Die Tatsache, dass diese Zahlungen klar fixiert sind (englisch *fixed income*), stellt den wichtigsten Unterschied zu den meisten anderen Anlageklassen dar. Eine Obligation ist nichts anderes als *ein Paket von im voraus festgelegten Mittelflüssen auf der Zeitachse.*[1]

Obwohl der Ertrag über die Laufzeit einer Obligation fest definiert ist, kann der Preis sehr volatil sein. 1994 und 1998 verloren Anleger in einem Jahr 10% auf den Wert ihrer Obligationen. Dies liegt daran, dass der Gegenwartswert eines zukünftigen Mittelflusses vom Zinsniveau abhängt. Wer also glaubt, dass Obligationen immer ein langweiliges und sicheres Investment sind, kann dafür teuer bezahlen.

In diesem Kurs werden wir das Verhältnis von Zinsen und Gegenwartswert analysieren. Wir betrachten dabei im Detail die verschiedenen Abdiskontierungsarten, den Effekt von Duration und Konvexität, die verschiedenen Zinsarten, die Form der Zinskurve und die Komponenten des Zinssatzes. Um all diese Fragen seriös beantworten zu können, kommen wir leider nicht um eine Vielzahl mathematischer Gleichungen herum. Die Voraussetzungen für diesen Kurs sind jedoch nicht wahnsinnig hoch: Logarithmen und Ableitungen.

2 Zinseszins und Abdiskontierung

2.1 Ein einziger Mittelfluss

Eine einfache Zinseszinsrechnungen lautet wie folgt: eine Investition P_τ, angelegt zum Zinssatz r wird nach τ Jahren

$$C_\tau = P_\tau \cdot (1+r)^\tau \tag{1}$$

abwerfen. Bei der Zinseszinsrechnung bewegen wir uns also vom Gegenwartswert in Richtung zukünftigen Mittelfluss. Bei der Abdiskontierung drehen wir die Gleichung um und rechnen von einem bekannten zukünftigen Mittelfluss, C_τ, zum Gegenwartswert

$$P_\tau = C_\tau \cdot \frac{1}{(1+r)^\tau} = C_\tau \cdot (1+r)^{-\tau} = C_\tau \cdot \delta_\tau. \tag{2}$$

[1]Es gibt natürlich auch Obligationen, bei denen die Mittelflüsse je nach Umfeld schwanken. Beispielsweisee zahlen Floaters einen variablen Coupon. Wenn auch der absolute Betrag nicht fix ist, wurde jedoch auch hier die Regel der Couponanpassung zu Beginn festgelegt. Obligationen mit unsicheren Mittelflüssen werden in Kapitel 6 behandelt.

Beachte dabei den letzten Ausdruck. Um zum Gegenwartswert zu kommen wird C_τ mit einem *Discontfaktor*, δ_τ, multipliziert. Da bei einer Obligation alle Mittelflüsse fixiert sind, berechnet sich der Preis somit alleine aus δ_τ. Im Spezialfall eines Zero-Bonds mit Nominalbetrag $C_\tau = 1$ ist δ_τ der Preis des Bonds (wenn $C_\tau = 1$, dann $P_\tau = 1 \cdot \delta_\tau$).

In Gleichung (1) und (2) haben wir mit ganzen Jahren gerechnet. Der Zinseszins kann aber auch mehrmals pro Jahr oder kontinuierlich verrechnet werden (englisch *compounding*). Folgende Tabelle zeigt die Formeln für C, P und δ.

	jährlich	mehrmals	kontinuierlich
$C_\tau =$	$P_\tau \cdot (1+r)^n$	$P_\tau \cdot \left(1+\frac{r}{h}\right)^{h\cdot\tau}$	$P_\tau \cdot e^{r\cdot\tau}$
$P_\tau =$	$C_\tau \cdot (1+r)^{-\tau}$	$C_\tau \cdot \left(1+\frac{r}{h}\right)^{-h\cdot\tau}$	$C_\tau \cdot e^{-r\cdot\tau}$
$\delta_\tau =$	$(1+r)^{-\tau}$	$\left(1+\frac{r}{h}\right)^{-h\cdot\tau}$	$e^{-r\cdot\tau}$

Der Zinssatz, r, in den verschiedenen Kolonnen ist natürlich nicht direkt vergleichbar. Es ist jedoch relativ einfach, beispielsweise von einem kontinuierlich verrechneten Zinssatz zu einem jährlich verrechneten Zinssatz zu gelangen:

$$\delta_\tau = e^{-r_k\cdot\tau} = (1+r_j)^{-\tau} \;\Rightarrow\; r_j = e^{r_k} - 1$$

Zinseszinsen wachsen exponentiell. Das erleichtert nicht immer das intuitive Verständnis. Wir greifen deshalb zu einem einfachen Trick, welcher uns später behilflich sein wird. Statt mit normalen Werten zu rechnen, benutzen wir Logarithmen. Aus der Zinseszinsrechnung mit kontinuierlicher Verrechnung wird dann:

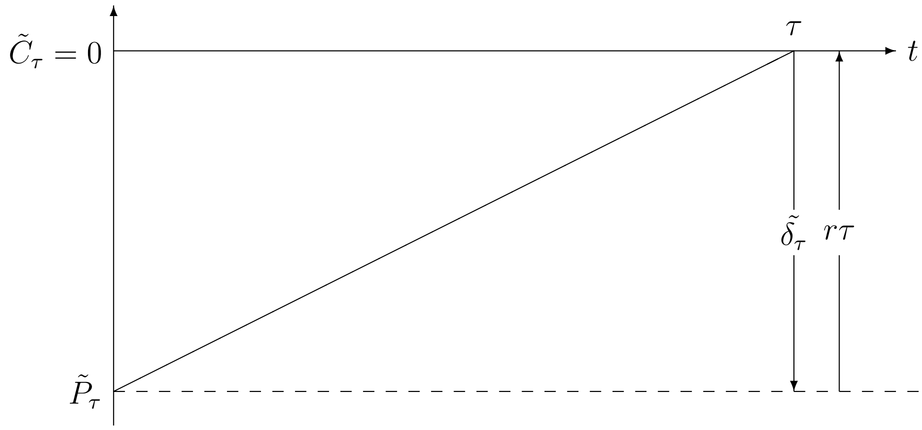
$$\begin{aligned}
\log(P_\tau) &= \log\left(C_\tau \cdot e^{-r\tau}\right) \\
&= \log(C_\tau) - \log\left(e^{r\tau}\right) \\
&= \log(C_\tau) - r\cdot\tau \\
\tilde{P}_\tau &= \tilde{C}_\tau - r\cdot\tau = \tilde{C}_\tau + \tilde{\delta}_\tau
\end{aligned} \tag{3}$$

Gleichung (3) wird durch Abbildung 1 illustriert. Die Abbildung zeigt, dass ein Mittelfluss linear auf seinen Gegenwartswert abdiskontiert werden kann. Die Steigung der Abdiskuntierungsgeraden ist gleich dem Zinssatz, r. Über die Zeit der Abdiskontierung, wächst der Log der ursprünglichen Investition um $r\tau = -\tilde{\delta}_\tau$, die Investition also um $e^{r\tau} = \frac{1}{\delta_\tau}$. Normalisieren wir den Mittelfluss auf $C_\tau = 1$, dann ist sein Log $\tilde{C} = 0$ und der Log des Gegenwartswertes $\tilde{P}_\tau = \tilde{\delta}_\tau$. Alles klar?

2.2 Eine typische Obligation = mehrere Mittelflüsse

In der Einleitung haben wir festgehalten, dass eine Obligation nichts anderes ist als ein Paket von im voraus festgelegten Mittelflüssen auf der Zeitachse. Der Wert der Obligation

Abbildung 1: Abdiskontierung eines Mittelflusses



ist darum die Summe der Gegenwartswerte aller Mittelflüsse:

$$P_d = \sum_\tau C_\tau \delta_\tau, \tag{4}$$

wobei δ_τ je nach Abdiskontierungsart berechnet wird. Normalerweise setzen sich die Mittelflüsse einer Obligation aus Coupons und Kapital zusammen. Gleichung (4) kann dann für einen Bond mit Nennwert N, einem Couponsatz von c, und einer Laufzeit von T Jahren wie folgt umgeschrieben werden:

$$P_d = N\left(\left[\sum_{\tau=1}^{T} c_\tau \delta_\tau\right] + \delta_T\right).$$

Der Preis P_d einer Coupon-zahlenden Obligation wird selbst bei unverändertem Zinssatz zwischen zwei Couponzahlungen ansteigen und dann bei der Couponzahlung um den Couponbetrag abfallen (warum?). Um dieses Auf-und-Ab im Preis zu vermeiden, wird in der Praxis P_d in 'sauberen Preis' P_c (*clean price*) und Marchzins I_a (*accrued interest*) aufgeteilt:

$$P_d = P_c + I_a. \tag{5}$$

Der Marchzins I_a widerspiegelt den seit der letzten Couponzahlung *pro rata* aufgelaufenen Coupon, d.h. wenn beispielsweise seit der letzten jährlichen Couponzahlung drei Monate vergangen sind, beträgt der Marchzins 1/4 des Coupons. Der 'saubere' Preis wird somit im Gegensatz zum 'schmutzigen' Preis P_d (*dirty price*) um den Couponeffekt gereinigt. Im Markt wird jeweils der 'saubere' Preis P_c quotiert; wer jedoch eine Obligation kauft, zahlt zusätzlich den Marchzins. Wichtig ist, dass der Begriff 'Preis' nicht immer klar erklärt wird und aus dem Kontext bestimmt werden muss.

3 Duration und Konvexität

3.1 Alles über Duration

Eine der wichtigsten Fragen im Fixed-Income-Bereich lautet: um wieviel verändert sich der Wert meiner Obligation / meines Obligationen-Portfolios wenn die Zinsen um $x\%$ ansteigen? Die einfachste Art, die Frage zu beantworten, besteht darin, den neuen Zinssatz in Gleichung (4) einzusetzen und den veränderten Wert auszurechnen. Diese Methode wird in der Praxis als 'Holzhammer-Methode' bezeichnet. Als Alternative dazu bietet sich eine Approximation über die Duration (und evt Konvexität) an.

Die Duration misst den prozentualen Wertverlust einer Obligation / eines Obligationenportfolios aufgrund einer *infinitesimal kleinen* Erhöhung des Zinsniveaus. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall, einer Obligation mit einem einzigen Mittelfluss (d.h. ein Zerobond). Der Preis einer solchen Obligation wird anhand von Gleichung (2) berechnet. Wenn wir diese Gleichung nach r ableiten, erhalten wir

$$\frac{dP_\tau}{dr} = \frac{-\tau C_\tau}{(1+r)^{\tau+1}} = \frac{-\tau}{(1+r)} \cdot \frac{C_\tau}{(1+r)^\tau}. \tag{6}$$

Gleichung (6) zeigt die *absolute* Wertveränderung eines Zerobonds aufgrund einer Zinsveränderung. Um von hier zur Duration zu gelangen, müssen wir diesen Wert erstens durch den Anfangswert teilen (damit erhalten wir eine *relative*, bzw. prozentuale, Wertveränderung) und zweitens mit -1 multiplizieren (da der *Wert fällt wenn die Zinsen steigen*). Aus Gleichung (6) wird somit

$$D_j \equiv -\frac{dP_\tau}{dr} \div P_\tau = -\frac{-\tau}{(1+r)} \cdot \frac{C_\tau}{(1+r)^\tau} \div \frac{C_\tau}{(1+r)^\tau} = \frac{\tau}{(1+r)}. \tag{7}$$

Wenn wir dieselbe Übung für einen Zerobond mit kontinuielicher Abdiskontierung machen, erhalten wir sogar eine einfachere Formel:

$$D_k \equiv -\frac{dP_\tau}{dr} \div P_\tau = -\left(-\tau C_\tau e^{-r\tau}\right) \div \left(C_\tau e^{-r\tau}\right) = \tau. \tag{8}$$

Vorsicht: Gleichungen (7) und (8) dürfen nicht verwechselt werden! D_j ist die Durationsformel für eine Veränderung eines jährlich verrechneten Zinses während D_k die Duration für eine Veränderung eines kontinuierlich verrechneten Zinses ist.

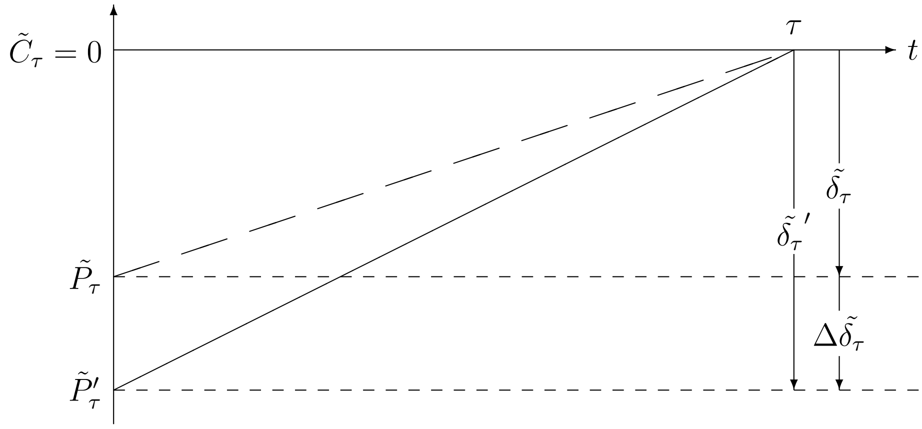
Mit Hilfe der Duration lässt sich nun sehr einfach die prozentuale Wertveränderung eines Portfolios abschätzen:

$$\%\Delta P_\tau \approx -D \cdot \Delta r. \tag{9}$$

Abbildung 2 zeigt eine grafische Illustration von Gleichung (8). Von Abschnitt 2.1 wissen wir, dass bei einem Zerobond $\tilde{P}_\tau = \tilde{\delta}_\tau = -r\tau$. Wenn wir den Zinssatz r um Δr erhöhen, dann verändert sich auch der Log des Preises $\tilde{P}$ um $\Delta\tilde{P} = \Delta\tilde{\delta}_\tau = -\Delta r\tau$. In der

Abbildung wird das relativ einfach ersichtlich: je länger der 'Hebelarm' (d.h. je länger die Laufzeit τ), umso grösser der Effekt eines höheren Zinssatzes (d.h. der Effekt einer steileren Abdiskontierung).

Abbildung 2: Effekt einer Zinsveränderung



Bisher haben wir nur die Duration eines Zerobonds betrachtet. Die Duration einer Obligation / eines Obligationenportfolios mit mehreren Mittelflüssen ist aber nur unwesentlich komplizierter. Wenn wir Gleichung (4) mit unseren Überlegungen zu Gleichung (6) kombinieren, sehen wir sofort, dass die *absolute* Veränderung von P_d bei jährlicher Abdiskontierung

$$\frac{dP_d}{dr} = \frac{-1}{1+r} \sum_{\tau=1}^{T} \frac{\tau C_\tau}{(1+r)^\tau} = \frac{-1}{1+r} \sum_{\tau=1}^{T} \tau P_\tau \tag{10}$$

betragen muss. Um von hier zur Duration (d.h. zur relativen Wertveränderung) zu gelangen, teilen wir wieder durch den Wert *der Obligation* und multiplizieren mit -1:

$$D_j \equiv -\frac{dP_d}{dr} \div P_d = \frac{-1}{1+r} \sum_{\tau=1}^{T} \tau \cdot \frac{P_\tau}{P_d}. \tag{11}$$

Die entsprechende Durationsformel bei kontinuierlicher Abdiskontierung ist noch einfacher:

$$D_k \equiv -\frac{dP_d}{dr} \div P_d = \sum_{\tau=1}^{T} \tau \cdot \frac{P_\tau}{P_d}. \tag{12}$$

Beachte, dass bei Gleichungen (11) und (12) die Duration einer Obligation mit mehreren Mittelflüssen als *gewichteter Durchschnitt der Duration der einzelnen Mittelflüsse* erscheint, wobei das Gewicht jedes Mittelflusses dem *Anteil des Gegenwartswertes des Mittelflusses am Preis der Obligation* (P_τ/P_d) entspricht.

Gleichung (9) ist auch für Obligationen mit mehreren Mittelflüssen gültig, wobei P_τ durch P_d ersetzt wird.

3.2 Macaulay-Duration

Bisher haben wir die Duration als Sensitivitätsmass benutzt (um wieviel verändert sich der Wert meiner Obligation / meines Obligationenportfolios, wenn die Zinsen um $n\%$ steigen oder fallen?). Die entsprechende Duration von Gleichungen (7) bis (12) werden als 'modifizierte' Duration bezeichnet. Ein anderes Durationsmass ist die sogenannte Macaulay-Duration. Diese misst die gewichtete Durchschnittliche Zeit bis zu den Mittelflüssen, wobei das Gewicht jedes Mittelflusses dem Anteil des Gegenwartswertes des Mittelflusses am Preis der Obligation entspricht. Dies ist offensichtlich ein vollkommen nutzloses Mass, wird aber aus historischen Gründen immer noch vielerorts berechnet. Die Formel für die Macaulay-Duration bei jährlicher Verrechnung lautet

$$D_{Macaulay} = \sum_{\tau=1}^{T} \tau \cdot \frac{P_\tau}{P_d}. \tag{13}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Formel für die entsprechende modifizierte Duration (11) lediglich durch den Term $1/(1+r)$. Es ist deshalb relativ einfach, von der nutzlosen Macaulay-Duration die sinnvolle modifizierte Duration zu berechnen

$$D_{modified} = \frac{1}{(1+\frac{r}{h})} \cdot D_{Macaulay}. \tag{14}$$

Hier benutzen wir h wieder für die Anzahl Verrechnungsperioden pro Jahr. Wenn der Zins jährlich verrechnet wird, ist $h = 1$; bei kontinuierlicher Verrechnung ist $h = \infty$ und die modifizierte und Macaulay-Duration sind identisch.

3.3 Immunisierung

Bei der Herleitung und Interpretation von Gleichung (11) haben wir bereits gesehen, dass die Duration einer Obligation der gewichtet Durchschnitt der Duration der einzelnen Mittelflüsse ist. Analog ist die Duration eines Portfolios von Obligationen der gewichtete Durchschnitt der Duration der einzelnen Obligationen im Portfolio, wobei das Gewicht jeder Obligation ihrem Anteil am Gesamtwert des Portfolios ist:

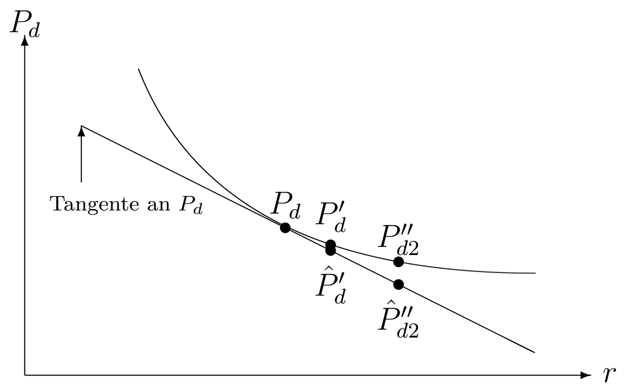
$$D_p = \sum_i w_i D_i, \qquad \textit{wobei} \sum_i w_i = 1 \tag{15}$$

Gleichung (15) kann auch dazu benutzt werden, die Gewichtung der einzelnen Obligationen eines Portfolios mit einer bestimmten Zielduration zu bestimmen. So hat ein Portfolio, das nur aus zwei Obligationen besteht die Duration $D_p = w_1 D_1 + (1 - w_1) D_2$. Wenn die Zielduration D_p festgelegt ist, können wir die Gleichung nach w_1 aufgelösen: $w_1 = \frac{D_p - D_2}{D_1 - D_2}$. Eine solche Rechnung macht beispielsweise Sinn, wenn dem Obligationenportfolio Verbindlichkeiten mit einer bekannten Duration entgegenstehen (z.B. eine Pensionskasse, welche mit ihrem Portfolio die Renten ihrer Versicherten finanziert). Unter *Immunisierung* versteht man eine Absicherung, bei der die Duration der Guthaben der Duration der Verpflichtungen angepasst werden. Dadurch eliminieren wir einen grossen Teil des Zinsrisikos des Gesamtportfolios.

3.4 Verfeinerung mittels Konvexität

Mittels der Duration haben wir eine *Approximation* für die prozentuale Wertveränderung eines Portfolios aufgrund einer Veränderung des Zinssatzes erhalten. Dass es sich dabei nur um eine Approximation handelt liegt daran, dass die Duration implizit eine *lineare* Beziehung zwischen Preis und Rendite annimmt. Normalerweise ist diese Beziehung jedoch nicht linear sondern *konvex*. Abbildung 3 illustriert diese Idee. Die konvexe Kurve widerspiegelt die Preis-Zins-Beziehung von Gleichung (4). Die über die Duration geschätzte Wertveränderung von Gleichung (9) wird durch die Tangente am Ursprung P_d dargestellt. Für eine Veränderung des Zinssatzes von r auf r' können wir mittels Duration die Wertveränderung auf $\hat{P}'_d$ abschätzen. Hätten wir statt der Duration die Holzhackermethode verwendet, so hätten wir statt dessen den korrekten Wert P'_d erhalten. Dieser Unterschied zwischen $\hat{P}'_d$ und P'_d ist immer positiv und steigt exponentiell mit dem Ausmass der absoluten Zinsveränderung.

Abbildung 3: Duration als Approximation



Wenn wir eine bessere Approximation suchen, dabei aber nicht auf die brutale Holzhackermethode zurückgreifen möchten, so können wir zusätzlich zur Duration das *Konvexitätsmass* benutzen. Mathematisch erhalten wir die Konvexität, wenn wir Gleichung (6) nochmals nach r ableiten:

$$K_j = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{\tau=1}^{T} \tau(\tau+1) \frac{P_\tau}{P_d} \tag{16}$$

Eine verfeinerte Version von Gleichung (9) lautet dann:

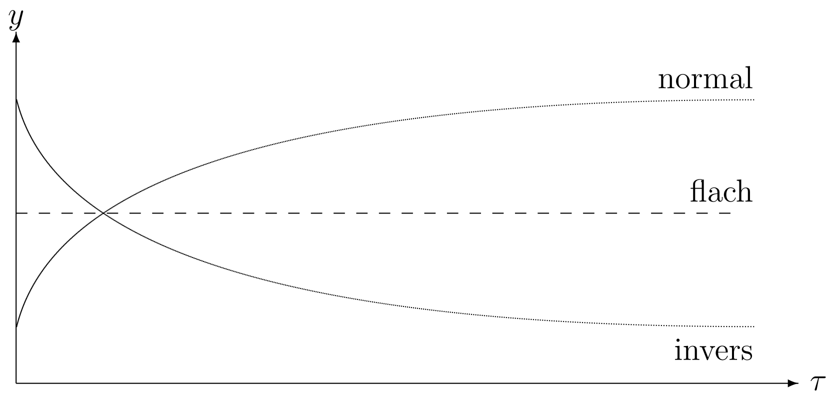
$$\% \Delta P_\tau \approx -D \cdot \Delta r + \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta r)^2. \tag{17}$$

4 Zinskurven

4.1 Typische Formen der Zinskurve

Bisher haben wir den Begriff 'Zins' oder 'Rendite' nicht genauer definiert und denselben Zinssatz r zur Abdiskontierung aller Mittelflüsse einer Obligation verwendet. Dies entspricht der Annahme einer flachen Zinskurve. Diese ist jedoch nicht der Normalfall. Abbildung 4 zeigt die drei typischen Formen der Zinskurve. Bei einer (wie bisher angenommenen) flachen Zinskurve ist der Zinssatz für alle Laufzeiten gleich. Bei einer normalen Zinskurve steigt das Zinsniveau mit der Laufzeit. Dies ist die meist zu beobachtende Kurvenart. Bei einer inversen Kurve haben längere Laufzeiten tiefere Zinsen. Es ist auch möglich, dass die Zinskurve beispielsweise im Bereich bis 10 Jahre Laufzeit normal, danach aber invertiert ist (man spricht dann von einer 'Inversion am langen Ende').

Abbildung 4: Zinskurven



4.2 Spot- und Parkurven

Von nun an sind wir mit unserer Terminologie präzieser:

Spotrate (= Zerorate) ist der Zinssatz, der zur Abdiskontierung eines einzigen Mittelflusses (Zerobond) benutzt wird. Für jeden Punkt τ auf der Zeitachse gibt es eine spezifische Spotrate r_τ.

Rendite ist der Zinssatz, welcher bei der Abdiskontierung einer Coupon-zahlenden Obligation den Preis ergibt. Dies ist bei einer risikofreien Obligation wiederum gleich die Summe der mit den Spotraten abdiskontierten Mittelflüsse. D.h. bei jährlicher Abdiskontierung

$$P_d = \sum_\tau \frac{C_\tau}{(1+r_\tau)^\tau} = \sum_\tau \frac{C_\tau}{(1+r)^\tau}. \tag{18}$$

Da zwei Obligationen mit gleicher Laufzeit nicht unbedingt dieselben Mittelflüsse C_τ haben, ist die Rendite r spezifisch für eine Obligation und nicht einzigartig für einen Punkt auf der Zeitachse.

Parrate ist die Rendite einer Obligation, bei der die Rendite und die Couponrate identisch sind. Anders ausgedrückt ist es die Rendite einer Coupon-zahlenden Obligation mit 'sauberem' Preis 100.[2]

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{c_T}{(1+p)^\tau} + \frac{1}{(1+p)^T} - I_a = 1, \qquad p_T = c_T \tag{19}$$

Für die Spot- und Parraten gibt es eine im engeren Sinn definierte Zins*kurve* (r_τ und p_τ). Im Markt wird mit dem Begriff (Zins-)kurve jedoch normalerweise auf die Benchmarkkurve (b_τ) Bezug genommen. Dabei handelt es sich um eine interpolierte Kurve von Restlaufzeit und Rendite von Benchmark-Obligationen. Benchmark-Obligationen sind in der Regel vor kurzem emittierte, grosse, liquide Anleihen. Da der Couponsatz bei Emission normalerweise so festgelegt wird, dass der Preis nahe bei Par (100) liegt, ist die Benchmarkkurve sehr nahe bei der Parkurve ($b_\tau \approx p_\tau$).

4.3 Quasi-modifizierte Duration

In Gleichungen (1) bis und mit (17) haben wir jeweils mit der Rendite r operiert. Dies stellt keine Probleme, solange die Zinskurve flach ist, denn dann sind Spotraten, Parraten und Renditen eh alle identisch. In allen anderen Fällen stellt sich jedoch die Frage, ob ich die Mittelflüsse mit der Spotrate oder der Rendite abdiskontieren soll. Wenn ich in Gleichungen (11) und (12) die Rendite r mit der Spotrate r_τ ersetze, wird aus der modifizierten Duration die quasi-modifizierte Duration. Die Interpretation der quasi-modifizierten Duration lautet: um wieviel verändert sich der Preis meiner Obligation / meines Obligationenportfolios, wenn sich die Spotkurve um $n\%$ verschiebt. Bei einer normalen Zinskurve ist die quasi-modifizierte Duration kleiner als die modifizierte Duration (warum?).

4.4 Strippen durch Bootstrapping

In der Praxis muss die Spotkurve aus der Benchmarkkurve abgeleitet werden. Dazu gibt es verschiedene Verfahren, welche z.T. auf nicht-linearer Regression oder komplexeren stochastischen Modellen beruhen. Die übliche Methode ist bekannt als *Bootstrap* und ist zum Glück relativ einfach. Die Idee besteht darin, mit den kurzen Sätzen anzufangen und die so gewonnene Information zur Berechnung der längeren Spotraten zu verwenden. Wenn wir den Ausdruck p_n für den

- Schritt 1: Der einjährige Spotsatz ist der einjährige Parsatz: $r_1 = b_1$.

[2] Hmmmm, das ist nicht ganz richtig. Der Preis eines Parbonds kann zwischen zwei Couponzahlungen leicht von 100 abweichen, da der Marchzins linear berechnet wird, die Abdiskontierung aber nicht-linear berechnet wird.

- Schritt 2: Definiere $n = 2$.
- Schritt 3: Bereinige $P_{d,n}$ um die ersten $n-1$ Coupons: $\bar{P}_n = P_{d,n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r_i)^i}$
- Schritt 4: Berechne $r_n = \left(C_n/\bar{P}_n\right)^{1/n} - 1$
- Schritt 5: Definiere n als $n+1$; zurück nach Schritt 3.

5 Forwards

Forwardraten sind *heute eingepreiste zukünftige Zinssätze.* In der Praxis sind Forwardraten extrem wichtig. Sie sind nicht nur entscheidend verantwortlich für die Form der Zinskurve, sondern dienen auch als Benchmark für alle aktiven Anlageentscheide. Forwardsätze können direkt in Form von Forward Rate Agreements (FRA) gehandelt werden.

5.1 Von Spot zu Forward (und zurück)

Definieren wir zuerst $f_{i,j}$ als Forwardsatz mit Startpunkt i und Endpunkt j. Nehmen wir nun an, wir können eine Million von Onkel Hugo seelig für ein Jahr zum Zinssatz r_1 investieren und gleichzeitig heute den Forwardsatz $f_{1,2}$ mittels eines FRA fixieren. Dann wissen wir bereits heute, dass wir in zwei Jahren $1'000'000 \cdot (1+r_1) \cdot (1+f_{1,2})$ besitzen werden. Aber warum so kompliziert? Wir hätten ja auch gleich unser Erbe für zwei Jahre zum Zinssatz r_2 anlegen können. Dann hätten hätten wir am Ende $1'000'000 \cdot (1+r_2)^2$. Solange es keine Arbitragemöglichkeit auf dem Zinsmarkt gibt, müssen beide Strategien dasselbe Resultat liefern, d.h. $(1+r_1)\cdot(1+f_{1,2}) = (1+r_2)^2$. Also: $(1+f_{1,2}) = (1+r_2)^2/(1+r_1)$ oder generell

$$(1+f_{\tau-1,\tau}) = \frac{(1+r_\tau)^\tau}{(1+r_{\tau-1})^{\tau-1}} = \frac{\delta_{\tau-1}}{\delta_\tau} \tag{20}$$

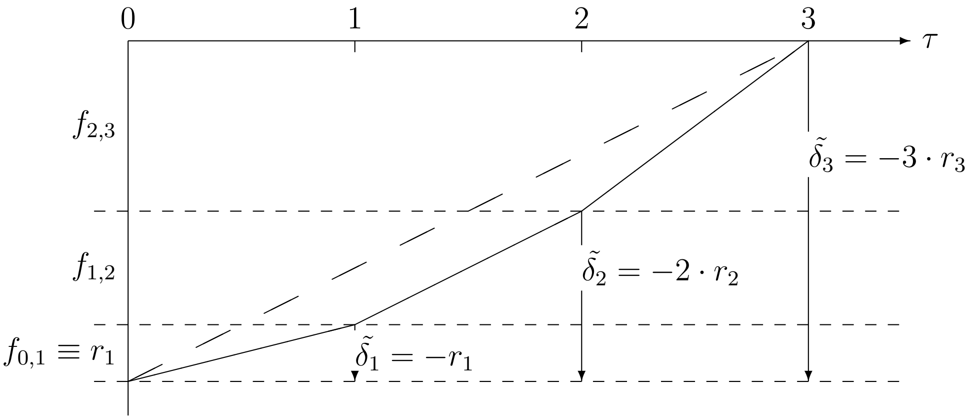
Gleichung (20) wird durch Abbildung 5 in linearisierter Form für kontinuierliche Abdiskontierung illustriert. Darin ist ersichtlich, dass die Forward-Raten als Differenz der Logarithmen der Diskontfaktoren berechnet werden können (mit anderen Worten, als Verhältnis der Diskontfaktoren). Ebenso ist ersichtlich, dass die Spotrate r_τ (die Steigung der gestrichelten Linie) nichts anderes ist als der Durchschnitt der Forwardsätze (die Steigung der durchgezogenen Linien). Bei kontinuierlicher Abdiskontierung gilt also

$$r_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} f_{i-1,i}. \tag{21}$$

Bei jährlicher Abdiskontierung ist die Formel nicht ganz so elegant, nämlich

$$r_\tau = \left(\prod_{i=1}^{\tau} [1 + f_{i-1,i}]\right)^{1/\tau} - 1. \tag{22}$$

Abbildung 5: Forwards



5.2 Theorien der Zinskurve

5.2.1 Reine Theorie der Markterwartungen

Wie oben gezeigt, können wir aus den Forwards eine Spotkurve berechnen und umgekehrt. Wo ist das Huhn, und wo ist das Ei? Die Frage lässt sich einfach beantworten: die Forward-Kurve ist die Mutter aller Kurven. Der Grund dafür ist, dass die Forwardraten direkt mit den Markterwartungen zusammenhängen. Gemäss der Theorie der Markterwartungen gilt sogar, dass alleine die Markterwartung die Forwardsätze bestimmt:

$$f_{\tau,\tau+1} = E_\tau[r_1]. \tag{23}$$

Die theoretische Grundlage der reinen Theorie der Markterwartungen baut auf der Idee, dass alle Abweichungen von Gleichung (23) durch Spekulanten weggehandelt werden. Erwartet der Markt beispielsweise einen tieferen zukünftigen Zinssatz als durch $f_{\tau,\tau+1}$ impliziert, so können Spekulanten einen Zerobond mit Laufzeit $\tau + 1$ kaufen und sich über den Verkauf eines Zerobond mit Laufzeit τ finanzieren.

Die reine Theorie der Markterwartung liegt auch hinter einer wichtigen Restriktion: da der kurzfristige Zinssatz nicht kleiner als Null sein kann, können auch die Forwards nicht kleiner als Null sein (Implikation: $\tau < \tau + n \Rightarrow \delta_\tau > \delta_{\tau+n}$)!

5.2.2 Theorie der Risikoprämie

Die reine Theorie der Markterwartungen hat einen grossen Schwachpunkt: Sie erklärt nicht, weshalb die Zinskurve normalerweise normal ist. Bei einer normalen Zinskurve steigen die Forwardsätze mit der Laufzeit. Gemäss der reinen Theorie der Markterwartung bedeutet dies, dass der Markt ständig von steigenden Zinsen ausgeht. Diese Aussage lässt sich mit der Hypothese rationaler Erwartungen nicht vereinen. Es braucht also eine bessere Erklärung.

Gemäss der Theorie der Risikoprämie verlangen Anleger auf (unsichere) zukünftige Zinssätze eine Risikoprämie. Diese Risikoprämie steigt in der Regel mit dem Risiko. Je länger eine Anlage, umso grösser das Risiko (Durations-Effekt), und umso höher die Risikoprämie. Aus Gleichung (23) wird dann

$$f_{\tau,\tau+1} = E_\tau[r_1] + \varphi_\tau. \tag{24}$$

Das Verhältnis von Risikoprämie und Laufzeit ist dabei interessant. Wer nur mit dem Durations-Effekt argumentiert, wird von einer quasi-linearen Beziehung ausgehen. Diese Sichtweise ignoriert jedoch zwei wichtige Aspekte. Erstens ist die Duration nur ein Sensitivitätsmass. Das Risiko ist jedoch auch von der Volatilität der entsprechenden Spotraten abhängig. Zweitens gibt es neben der Duration noch einen Konvexitätseffekt. Dieser ist immer positiv und steigt exponentiell mit der Laufzeit.

5.2.3 Theorie der Marktsegmentierung

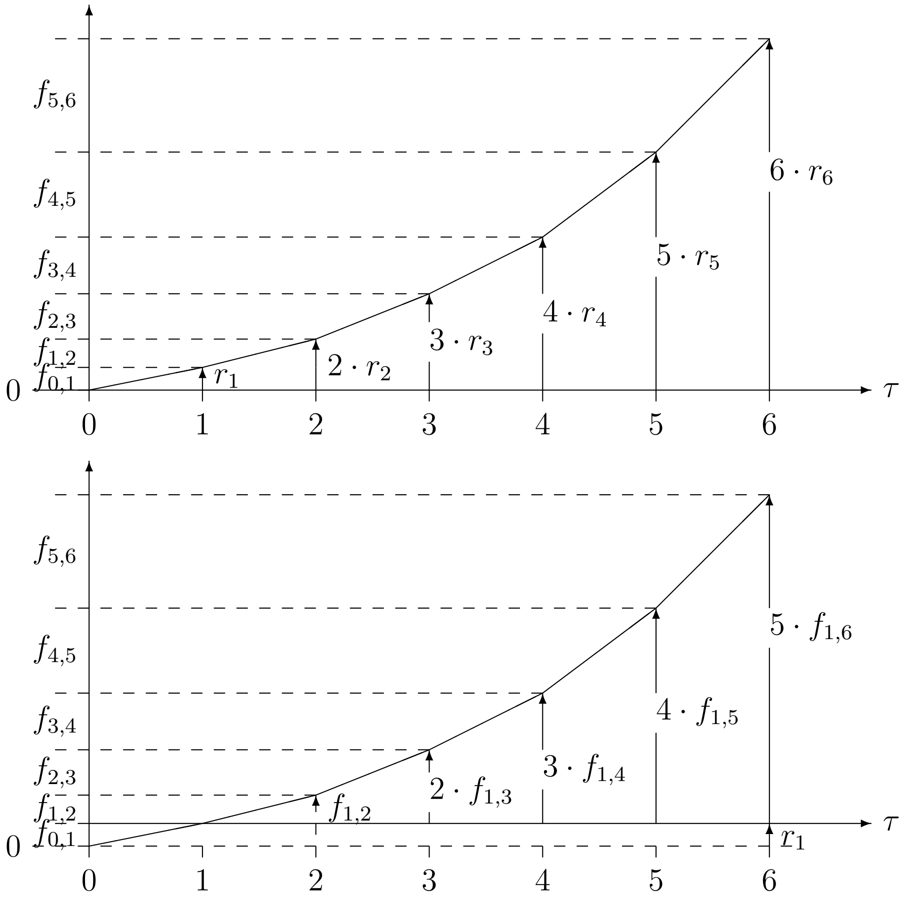
Im Gegensatz zu den beiden vorhergehenden Theorien fusst die Theorie der Marktsegmentierungen (auch bekannt als *preferred hapitat* Theorie) auf Angebot und Nachfrage in verschiedenen Laufzeiten-Segmenten. Die Theorie nimmt an, dass unterschiedliche Akteure starke unterschiedliche Präferenzen für ihre Anlagen bzw. ihre Mittelaufnahme haben. Beispielsweise möchten Lebensversicherungen vorallem Obligationen mit langen Laufzeiten in ihrem Portfolio halten, während sich Banken ausschliesslich auf kurze Laufzeiten konzentrieren. Die starken Präferenzen führen dazu, dass keine Arbitrage zwischen den verschiedenen Segmenten stattfindet. Wenn beispielsweise die Lebensversicherungen ihre Guthaben aus Aktien in Obligationen umschichten, werden die Zinsen am langen Ende fallen, ohne dass sich das kurze Ende bewegt. So könnte eine inverse Zinskurve erklärt werden.

5.3 Forward-Äquivalenz

Bisher haben wir die Forwards immer nur als einjährige Sätze mit unterschiedlichem Ausgangspunkt behandelt. Genau so gut können wir jedoch auch Forwards als eingepreiste zukünftige Zins*kurven* behandeln. Abbildung 6 illustriert die Idee. In der oberen Grafik sehen wir eine Kurve von Forwardsätzen. Wie in Gleichung (21) gezeigt ist die Spotrate r_τ der Durchschnitt der Forwardsätz mit Endpunkt kleiner gleich τ. Die Forwardsätze definieren also die ganze Kurve der Spotsätze.

Die untere Grafik projektiert die Kurve eine Periode forwärts. Analog wie die Herleitung der Spotsätze sehen wir, dass die Forwardsätze für mehr als ein Jahr nichts anderes als der Durchschnitt der einjährigen Forwardsätze der Subperioden ist. Bei kontinuierlicher

Abbildung 6: Forwards-Äquivalenz



Abdiskontierung haben wir also analog zu Gleichung (21)[3]

$$f_{k,\tau} = \frac{1}{(\tau - k)} \sum_{i=k+1}^{\tau} f_{i-1,i}. \tag{25}$$

Für jährliche Abdiskontierung ist die Formel einmal mehr weniger elegant:

$$(1 + f_{k,\tau}) = \left(\prod_{i=k+1}^{\tau} [1 + f_{i-1,i}] \right)^{1/(\tau-k)} - 1. \tag{26}$$

Abbildung 6 führt uns auch gleich zum wichtigen Prinzip der Forward-Äquivalenz. Dieses Prinzip sagt, dass *solange sich die Zinskurve wie durch die Forwards impliziert bewegt, ist der Ertrag aller Obligationen der gleiche (kurze) Zinssatz.* Die Erklärung ist sehr

[3]Gleichungen (21) und (25) gehen immer noch von einer diskreten Kurve aus, d.h. wir rechnen jeweils mit einjährigen Subperioden. Die wahre Eleganz kontinuierlicher Abdiskontierung zeigt sich aber erst bei infinitesimal kleinen Subperioden. Wenn wir f_i als die augenblickliche Forwardrate mit für Zeitpunkt i (also die Forwardrate mit Startpunkt i und Endpunkt i plus eine Mikrosekunde), dann ist $r_\tau = \frac{1}{\tau} \int_\tau f_\tau d\tau$

einfach. Bleiben wir bei unserer alten Notation von $\tilde{P}_\tau$ für den Logarithmus des Preises eines Zerobonds mit Verfall in τ und $\tilde{C}_\tau$ für den Logarithmus des Nominalbetrags (d.h. des Mittelflusses zum Zeitpunkt τ). Wenn $\tilde{C}_\tau = \tau \cdot r_\tau$, dann ist $\tilde{P}_\tau = 0$ (umgekehrt, wenn $P = 1$, dann beträgt $C = e^{r\tau}$). Wenn ich mich nun ein Jahr weiter bewege, und die neue Zinskurve durch die Forwardkurve f_1, τ bestimmt wird, dann steigt $\tilde{P}_\tau$ von 0 auf $\tau \cdot r_\tau - (\tau - 1) \cdot f_{1,\tau}$. Ersetzen wir in diesem letzten Ausdruck r_τ und $f_{1,\tau}$ durch die entsprechenden Ausdrücke von Gleichungen (21) und (25), dann erhalten wir

$$\Delta \tilde{P} = \tau \cdot \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} f_{i-1,i} - (\tau - 1) \cdot \frac{1}{\tau - 1} \sum_{i=2}^{\tau} f_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{\tau} f_{i-1,i} - \sum_{i=2}^{\tau} f_{i-1,i} = f_{0,1} = r_1$$

Q.E.D! Beachte, dass der letzte Ausdruck unabhängig von τ ist. Es spielt unter diesem Szenario also absolut keine Rolle, wo auf der Zeitachse wir die Mittelflüsse positionieren. Das Prinzip der Forward-Äquivalenz lässt sich übrigens auch allgemeiner für einen Zeitschritt von k Perioden zeigen.

Unterschiede in der Performance von zwei Obligationen kommen also nur dadurch zustande, dass sich die Spotraten anders entwickeln als in den Forwards eingepreist. Im analytischen Rahmen von Abbildung 6 lässt sich sehr einfach zeigen, dass über einen infinitesimal kleinen Anlagehorizont ($k = 0$) alle Preisveränderung als Summe der Veränderungen in den Forwardsätzen interpretiert werden können:

$$\Delta \tilde{P} = \sum_{i=1}^{\tau} \Delta f_{i-1,i} \tag{27}$$

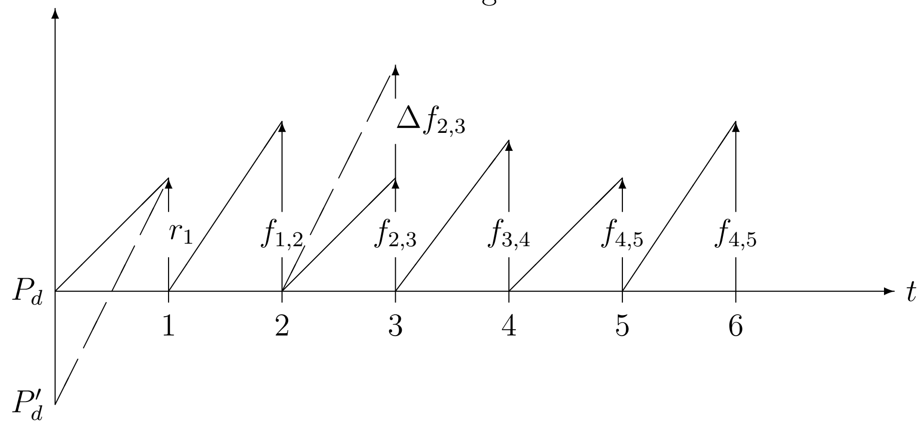
6 Spezialfälle

In diesem Kapitel betrachten wir Obligationen, bei denen die *Regeln zur Bestimmung der Mittelflüsse* im voraus definiert werden, der genaue *Betrag jedoch zu Beginn nicht bekannt* ist.

6.1 Variabel verzinste Anleihen

Bei einer variabel verzinsten Anleihe (*Floating Rate Note, Floater*) hängt der zum Zeitpunkt τ ausbezahlte Coupon vom Spotsatz r_τ zu Beginn der Couponperiode ab. Der Preiseffekt einer Zinsveränderung ist direkt aus Abbildung 7 ersichtlich. Der Preis eines risikofreien Floaters beim zweitletzten Coupon muss 100 sein, folglich muss der Preis beim drittletzten Coupon auch 100 sein usw. Veränderungen in den Forwards, z.B. von $f_{2,3}$ auf $f_{2,3}$ auf $f_{2,3} + \Delta f_{2,3}$ haben keinen Einfluss auf P_d, da der höhere Abdiskontierungsfaktor durch höhere erwartete Mittelflüsse ausgeglichen wird. Hingegen wird sich eine Veränderung von r_1 auf P_d auswirken, sobald der Coupon an $t = 1$ fixiert ist.

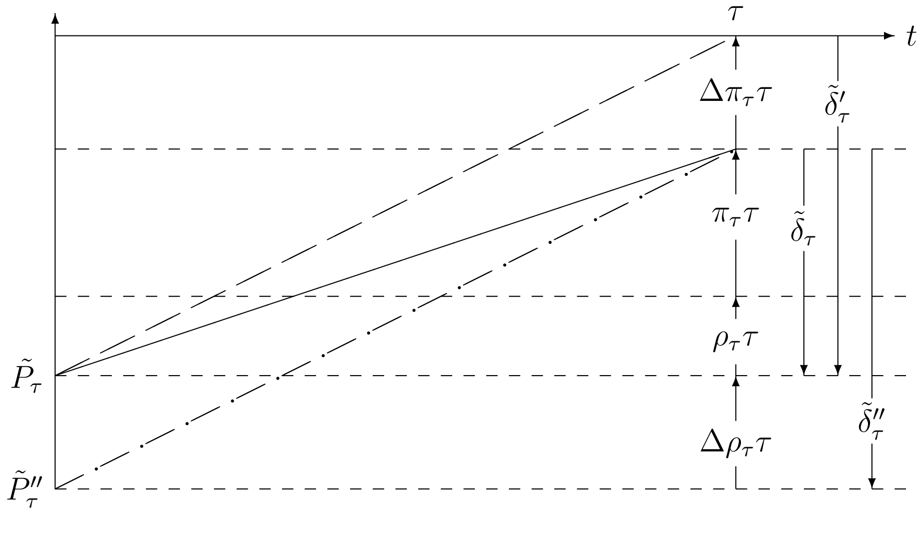
Abbildung 7: Floater



6.2 Inflationsindexierte Anleihen

Bei einer (nominalen) Obligation ist der nominale Ertrag im voraus bekannt. Da die Inflation jedoch nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann, ist der reale Wert des nominalen Ertrags unbekannt. Inflatinsindexierte Obligationen (reale Anleihen, inflationsgeschützte Anleihen, *Inflation-linked Bonds*) hingegen zahlen einen bekannten realen Ertrag, dessen nominaler Betrag jedoch unbekannt ist.

Abbildung 8: Inflationsindexierte Anleihe



Der Inflationsschutz einer realen Obligation funktioniert normalerweise so, dass der Nominalbetrag N der Obligation mit einem Inflationsfaktor $f = \frac{CPI_\tau}{CPI_0}$ multipliziert wird. Der ausbezahlte Coupon wird dann $C_\tau = c \cdot N \cdot f$ und am Schluss erhält der Investor nicht nur das ursprüngliche Kapital N sondern $N \cdot f$. Abbildung 8 illustriert das Prinzip für eine reale Obligation mit einem einzigen Mittelfluss.[4]

In dieser Abbildung wird der nominale Zins r_τ in zwei Teile zerlegt: der Realzins ρ_τ und die sogenannte *Breakeven-Inflation* π_τ. Wir haben also $r_\tau = \rho_\tau + \pi_\tau$. Damit ist $\tilde{\delta}_\tau = -\tau(\rho + \pi)$. Die Breakeven-Inflation ist so definiert, dass dieser Diskontfaktor für eine reale Anleihe gleich gross ist wie der Diskontfaktor einer nominalen Anleihe mit identischen erwarteten Mittelflüssen.

Was passiert nun bei einem Anstieg der Zinsen? Wenn π_τ um $\Delta\pi$ ansteigt, dann fällt auch δ_τ auf $\delta'_\tau = -\tau(\rho + \pi + \Delta\pi)$ (zur Erinnerung: δ_τ ist negativ). Fällt deshalb der Preis der Obligation? Nein, denn gleichzeitig steigt $\tilde{C}$ um $\Delta\pi\tau$. Ganz anders ist die Situation, wenn ρ_τ steigt. Aus δ_τ wird dann $\delta''_\tau = -\tau(\rho + \Delta\rho + \pi)$. Da ein Anstieg der Realzinsen keinen Einfluss auf die erwarteten Mittelflüsse hat, fällt der Preis der Anleihe von $\tilde{P}$ auf $\tilde{P}''$. Wir sehen also, dass die Nominalzinsen von zwei *Risikofaktoren* (ρ und π) abhängen. Inflationsindexierte Obligationen sind gegen einen der beiden Risikofaktoren (nämlich π) geschützt. Das bedeutet, dass sie tendenziell weniger volatil als nominale Anleihen sind. Entsprechend wird oft argumentiert, dass Inflation-linked Bonds langfristig schlechter performen müssen als nominale Anleihen. In Wahrheit wird jedoch oft beobachtet, dass diese *Inflationsriskio-Prämie* sehr nahe bei 0 liegt und für das Inflationsrisiko nur schlecht entschädigt.

6.3 Obligationen mit Optionalität

Bei den Obligationen mit Optionalität gibt es zwei Spielarten:

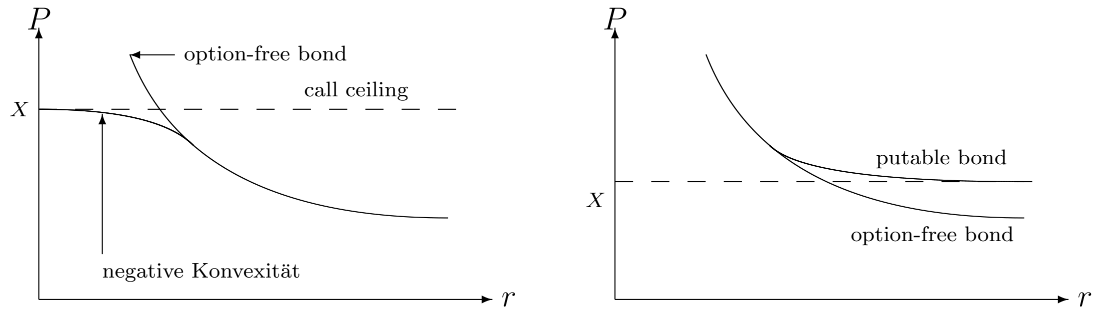
- Obligationen mit Verkaufsoption (*puttable bond*) erlauben dem Investor, die Obligation an einem bestimmten Datum zu einem bestimmten Preis X an den Emittenten zurückzugeben. Aus der Sicht des Investors präsentiert sie sich als eine Kominati-on einer gewöhnliche Obligation plus einer Put-Option, welche den Investor gegen steigende Zinsen absichert.
- Obligationen mit Kaufoption (*callable bond*) erlauben hingegen dem Emittenten, eine Obligation an einem bestimmten Datum zu einem bestimmten Preis vom Investor zurückzukaufen. Aus der Sicht des Investors präsentiert sie sich als eine Komination einer gewöhnliche Obligation plus einer Shortposition auf einer Call-Option, welche den potentiellen Profit des Investors limitiert.

In Abbildung 9 wird die Funktionsweise veranschaulicht. Der Ausführungspreis X wirkt dabei als Unter- bzw. Obergrenze für den Preis der Obligation. Interessant ist, dass im Gegensatz zu Abbildung 3 das Preis/Zinsverhältnis bei Obligationen mit Kaufoption nicht mehr überall Konvex ist. Bei einer solchen Obligation kann also die Verwendung der Duration zur Abschätzung einer Preisveränderung in einem zu hohen Preis resultieren. Schliesslich ist noch darauf hinzuweisen, dass der Preis der eingebauten (*embedded*) Option neben

[4] Bei inflationsindexierten Anleihen mit mehreren Mittelflüssen ist der Mechanismus identisch.

dem Zinsniveau unter anderem auch von der Volatilität abhängt. Je höher die Volatilität umso höher ihr Preis. Bei steigender Volatilität wird also der emphceteris paribus der Preis einer Obligation mit Verkaufsoption steigen und der Preis einer Obligation mit Kaufoption fallen.

Abbildung 9: Obligationen mit Optionalität



7 Praktisches Obligationen-Management

In diesem Kapitel betrachten wir einige Fragen, welche einen Fixed-Income Portfoliomanager in seiner praktischen Arbeit beschäftigen.

7.1 Fixed-Income Benchmarks

Um die Arbeit eines aktiven Portfoliomanagers zu beurteilen, wird normalerweise die Performance eines Portfolios mit derjenigen einer passenden Benchmark verglichen. Folgende Arten von Benchmarks werden in der Praxis verwendet:

- Globale Staatsanleihen: Der wichtigste Index für globale Staatsanleihen ist der *JP Morgan Government Bond Index* (GBI, manchmal auch 'GBI Traded' genannt). Dieser Index besteht aus rund 500 Anleihen von den wichtigsten Währungen (USD, CAD, AUD, EUR, SEK, DKK, GBP, JPY). Um in den Index aufgenommen zu werden, müssen die Emissionen gewisse Liquiditätskriterien erfüllen und dürfen eine Restlaufzeit von mindestens einem Jahr haben. Der Index wird auf globaler Ebene sowie auf Ebene der einzelnen Märkte berechnet. Es bestehen auch Subindizes auf Laufzeiten (1-3, 3-5, 5-7, 7-10 und 10+ Jahre) und auf Grad der Liquidität (der GBI Active besteht aus einem Subset der liquidesten Anleihen innerhalb des GBI). Euroland, Japan und die USA machen je etwa 30% des Index aus. Der Gesamtindex hat eine Duration von c.a. 5.5. Ein vergleichbarer Index ist der *Citigroup/Salomon Smith Barney World Government Bond Index*, dieser ist jedoch weniger verbreitet.

- Globale Obligationen: Im *Lehman Global Aggregate Index* befinden sich neben den Staatsanleihen auch Obligationen von nicht-staatlichen und sogenannten 'supranationalen' Emittenten. Der Index besteht aus über 5000 Titeln, darunter auch knapp 20% amerikanischer Mortgage Backed Securities. Er hat in der Regel eine kürzere Duration als die Staatsanleihenindizes. Zudem ist der Anteil des amerikanischen Marktes deutlich höher (rund 60%).

- Europäische Obligationen: Für die beiden wichtige globalen Indizes gibt es europäische Pendants. Der *JP Morgan European Aggregate* besteht nur aus (knapp 300) Staatsanleihen aus Euroland. Der *Lehman European Aggregate* beinhaltet auch Nicht-Staatsanleihen und Pfandbriefe.

- Schweizer Obligationen: Der *Swiss Bond Index* (SBI) ist inzwischen der wichtigste Index für auf CHF denominierte Obligationen. Der Index wird von der SWX in Realzeit berechnet. Es bestehen Subindizes für Eidgenossen, Staatsanleihen und Nichtstaatsanleihen. Eine Eigenheit des Schweizer Marktes ist zudem die wichtige Unterteilung in inländische und ausländische Schuldner.

- Synthetische Indizes: Die *Zürcher Kantonalbank* hat auf dem Schweizer Markt mit ihren *Constant Maturity Indices* Pionierarbeit geleistet. Die ZKB schätzt auf einem breiten Universum eine theoretische Zinskurve und rechnet dann täglich eine Performance eines hypothetischen Parponds mit einer bestimmten Laufzeit. Die Prozedur ist ausgeprochen sophistiziert, wurde aber durch dilettantische Fehler in der Umsetzung diskreditiert.

- Inflationsgeschützte Obligationen: Der wichtigste Index in diesem Bereich wird von *Barclays Capital* berechnet. Aufgrund des relativ schwach diversifizierten Marktes besteht der Index immer noch aus weniger als 100 Obligationen. Der Index weist zudem eine Realzinsduration von mehr als 10 auf, hat also ein viel grösseres Realzinsrisiko als die meisten anderen Indizes.

7.2 Durationmanagement

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Duration zur Approximations der Wertveränderung eines Obligationenportfolios aufgrund von Zinsschwankungen verwendet. In der Tat funktioniert diese Approximation sehr gut. So lässt sich mittels der Duration rund 80% der Volatilität in den Obligationenmärkten erklären. Für einen Portfoliomanager ist deshalb die richtige Durationsstrategie besonders wichtig. Das Prinzip ist einfach: *Fahre eine lange Duration, wenn Du glaubst, dass die Zinsen am Ende des Anlagehorizonts unter der Forward-Kurve liegen. Fahre eine kurze Duration, wenn Du glaubst, dass die Zinsen am Ende des Anlagehorizonts über der Forward-Kurve liegen. Wenn du glaubst, die Forwards haben recht, dann fahre eine neutrale Duration.* Zu beachten:

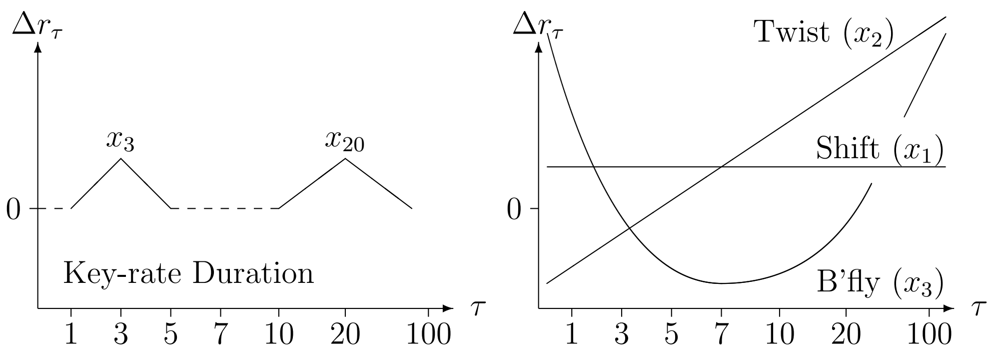
- Vorsicht vor falschem Vertrauen in die eigenen Annahmen.

- Nicht-parallele Verschiebungen der Zinskurve führen dazu, dass gewisse Segmente der Kurve Durations-adjustiert unterschiedlich performen. Generell gilt, bei steigender Steilheit fahre Bullet, bei Verflachung fahre Barbell.
- Das Carry-Argument: Grundsätzlich ist der Carry ein Indikator für die Forwards. In der Praxis ist ein hoher Carry jedoch auch ein Zeichen dafür, dass sich eine lange Duration lohnen könnte.

7.3 Risikomanagement

Aktives Portfolio Management versucht, mit gezielten Wetten in verschiedenen Dimensionen eine *risikoadjustierte* Outperformance zu generieren. Um eine Idee für das Risiko der aktiven Positionierungen zu erhalten, braucht es ein Risikomodell. Da jeder Bond über die Zeit hinweg sein Risikoprofil verändert, funktionieren die simplen Ansätze der Aktienmanager nicht. Normalerweise funktioniert ein Risikomodell für Obligationen wie folgt:

Abbildung 10: Zinsrisiko-Modelle



- Schritt 1: Die Sensitivität jeder Obligation im Universum gegenüber der Zinskurve wird in *Faktoren* zerlegt. Der einfachste Faktor ist die Duration (=Sensitivität gegenüber einer parallelen Verschiebung der gesamten Zinskurve). Beliebt in der Praxis sind die sogenannten *Key-Rate Duration* (auch manchmal PV01 genannt) und 3-Faktor Modelle (Shift-Twist-Butterfly). Abbildung 10 illustriert die beiden Konzepte.
- Schritt 2: Mittels einer Regressionsanalyse lässt sich für jeden Zeitraum ein Faktorertrag bestimmen. Dazu regressiert man die Performance jeder Obligation auf die Faktorsensitivitäten:

$$R = \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_n x_n + \varepsilon$$

- Schritt 3: Die Faktorerträge $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ... werden historisiert. Normalerweise wird daraus eine Varianz-Kovarianz-Matrize berechnet.

- Schritt 4: Aufgrund der historisierten Faktorerträge lässt sich dann das relative und absolute Risiko bestimmen. Die Standard-Formel lautet:

  $$\sigma^2 = \vec{w}'\Omega\vec{w} + \vec{h}'\vec{s},$$

  wobei σ^2 die Varianz, $\vec{w}$ ein Vektor der absoluten oder relativen Faktorsensitivität, Ω die Varianz-Kovarianz-Matrize der Faktorerträge, $\vec{h}$ ein Vektor von Gewichten und $\vec{s}$ ein Vektor spezifiscer Risiken ist.

8 Checkliste der Lernziele

Nach diesem Kurs solltet Ihr in der Lage sein, folgende Aufgabestellungen zu lösen:

- Abdiskontierung und Zinseszinsrechnungen für einen Mittelfluss bei jährlicher, mehrfacher und kontinuierlicher Verrechnung
- Übersetzung eines jährlichen, mehrfachen oder kontinuierlichen Zinssatzes in einen anderen Zinssatz
- Verständnis der Linearisierung von kontinuierlicher Abdiskontierung (inklusive Rechenbeispielen)
- Bewertung einer Obligation bei vorgebenen Mittelflüssen und Abdiskontierungsart
- Anwendung von sauberem Preis und Marchzins
- Erklärung und Anwendung der Begriffe Duration, modifizierte Duration, Macaulay Duration und quasi-modifizierte Duration
- Berechnung des Zinseffektes auf eine Obligation mittels Holzhammermethode, Duration und Konvexität
- Erklärung und Anwendung der Begriffe Parrate, Spotrate, Rendite, Benchmarkkurve
- Strippen der Spotkurve aus der Benchmarkkurve
- Beschreibung und Erklärung einer Zinskurve
- Berechnung der Forwardkurve aus der Spotkurve und umgekehrt
- Erklärung und Anwendung der Forward-Äquivalenz
- Erklärung der Funktionsweise von Floatern, inflationsindexierten Anleihen und Obligationen mit Optionalität
- Beschreibung der wichtigsten Obligationen-Indizes
- Erklärung der Idee des Durations- und Risikomanagements